Formulekaart VWO

Kansrekening

Tellen

$n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$
$0! = 1$
$\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$
Binomium van Newton: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

Kansrekening

Voor toevalsvariabelen X en Y geldt $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$

Voor onafhankelijke toevalsvariabelen X en Y geldt $\sigma(X+Y) = \sqrt{\sigma^2(X) + \sigma^2(Y)}$

$\sqrt{n}$-wet: bij een serie van n onafhankelijk van elkaar herhaalde experimenten geldt voor de som S en het gemiddelde $\bar{X}$ van de uitkomsten X:

$E(S) = n \cdot E(X)$ $\quad \sigma(S) = \sqrt{n} \cdot \sigma(X)$
$E(\bar{X}) = E(X)$ $\quad \sigma(\bar{X}) = \dfrac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$

Binomiale verdeling

Voor de binomiaal verdeelde toevalsvariabele X waarbij n het aantal experimenten is en p de kans op succes per keer geldt:
$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, met $k = 0, 1, 2, \ldots, n$

Verwachting :	$E(X)$	$=$	np
Variantie :	$\mathrm{Var}(X)$	$=$	$np(1-p)$
Standaardafwijking :	$\sigma(X)$	$=$	$\sqrt{\mathrm{Var}(X)} = \sqrt{np(1-p)}$

Normale verdeling

Voor een toevalsvariable X die normaal verdeeld is met gemiddelde μ en standaardafwijking σ geldt:
$Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$ is standaard normaal verdeeld en
$P(X \leq g) = P\left(Z \leq \dfrac{g-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\dfrac{g-\mu}{\sigma}\right)$
Hierin is Φ de cumulatieve verdelingsfunctie van de standaardnormale verdeling.

Algebra en verbanden

Vergelijkingen

vergelijking	oplossing	voorwaarde
$ax^2 + bx + c = 0$	$x = \dfrac{-b + \sqrt{D}}{2a}$ of $x = \dfrac{-b - \sqrt{D}}{2a}$ met $D = b^2 - 4ac$	$a \neq 0, \quad D \geq 0$
$x^n = c$	$x = c^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{c}$	$x > 0, \quad c > 0, \quad n > 0$
$g^x = a$	$x = {}^g\log a = \dfrac{\log a}{\log g}$	$a > 0, \quad g > 0, \quad g \neq 1$
${}^g\log x = b$	$x = g^b$	$x > 0, \quad g > 0, \quad g \neq 1$
$e^x = a$	$x = \ln a$	$a > 0$
$\ln x = b$	$x = e^b$	$x > 0$

Machten en logaritmen

regel	voorwaarde
$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$	$a > 0$
$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$	$a > 0, \quad n > 0$
$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$	$a > 0$
$a^p : a^q = a^{p-q}$	$a > 0$
$(a^p)^q = a^{pq}$	$a > 0$
$(ab)^p = a^p b^p$	$a, \quad b > 0$
${}^g\log a = \dfrac{{}^p\log a}{{}^p\log g}$	$g > 0, \quad g \neq 1, \quad a > 0, \quad p > 0 \quad p \neq 1$
${}^g\log a + {}^g\log b = {}^g\log ab$	$g > 0, \quad g \neq 1, \quad a > 0, \quad b > 0$
${}^g\log a - {}^g\log b = {}^g\log \dfrac{a}{b}$	$g > 0, \quad g \neq 1, \quad a > 0, \quad b > 0$
${}^g\log a^p = p \cdot {}^g\log a$	$g > 0, \quad g \neq 1, \quad a > 0$

Verbanden

lineair verband $H = b + a \cdot t$	b is beginwaarde en a is helling of richtingscoëfficiënt
exponentieel verband $H = b \cdot g^t$	b is beginwaarde en g is groeifactor
harmonische trilling $H = d + a \cdot \sin b(t - c)$ of $H = d - a \cdot \sin b(t - c)$	d is evenwichtstand, (c, d) is beginpunt, $\frac{2\pi}{b}$ is de periode, a is de amplitude en $a > 0$, $b > 0$

Somformules voor rijen

Voor de som S van de rekenkundige rij $a, a + v, a + 2v, \ldots, a + (n - 1)v$ geldt:

$S = n \cdot \frac{\text{eerste term+laatste term}}{2}$

Voor de som S van de meetkundige rij $a, ar, ar^2, ar^3, \ldots ar^{n-1}$ geldt:

$$S = \sum_{k=0}^{n-1} ar^k = a\frac{1 - r^n}{1 - r}(r \neq 1)$$

Voor de som S van de meetkundige rij $a, ar, ar^2, ar^3, \ldots$ met $-1 < r < 1$ geldt:

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} ar^k = a\frac{1}{1 - r}$$

Differentievergelijkingen

recursievergelijking	directe formule
$u(n+1) = a \cdot u(n) + b$ met beginvoorwaarde $u(0)$	$u(n) = \frac{b}{1-a} + \left(u(0) - \frac{b}{1-a}\right) a^n$ of $u(n) = U + a^n(u(0) - U)$ met $U = \frac{b}{1-a}$ Als $-1 < a < 1$, dan is $\lim_{n \to \infty} u(n) = \frac{b}{1-a}$
exponentiële groei $u(n+1) = a \cdot u(n)$	$u(n) = u(0) \cdot a^n$
logistische groei $u(n+1) = u(n) + c \cdot u(n) \cdot (G - u(n))$ waarin G de grenswaarde is	

Differentiëren

naam van de regel	functie	afgeleide
constante maal f	$g(x) = c \cdot f(x)$	$g'(x) = c \cdot f'(x)$
somregel	$s(x) = f(x) + g(x)$	$s'(x) = f'(x) + g'(x)$
productregel	$p(x) = f(x) \cdot g(x)$	$p'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
quotiëntregel	$q(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$	$q'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$
kettingregel	$k(x) = f(g(x))$	$k'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ of $\dfrac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}g} \cdot \dfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}$
standaardfuncties	$f(x) = c$	$f'(x) = 0$
	$f(x) = x^n$	$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$
	$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
	$f(x) = g^x$	$f'(x) = g^x \cdot \ln g \quad \text{met} g > 0$
	$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \dfrac{1}{x}$
	$f(x) = {}^g\log x$	$f'(x) = \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{1}{\ln g}$
	$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$
	$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$
	$f(x) = \tan x$	$f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
Lineaire benadering van f in a : $L(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x - a)$		

Integreren

functie	primitieve
$f(x) = x^n$	$F(x) = \dfrac{1}{n+1}x^{n+1} + c (n \neq -1)$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$F(x) = \ln\|x\| + c$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x + c$
$f(x) = g^x$	$F(x) = \dfrac{1}{\ln g} g^x + c$
$f(x) = \ln x$	$F(x) = x \ln x - x + c$
$f(x) = {}^g\log x$	$F(x) = \dfrac{1}{\ln g}(x \ln x - x) + c$
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x$
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x$

Lengte van de grafiek van f op het interval $[a, b]$: $L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} \mathrm{d}x$

Inhoud van een omwentelingslichaam dat ontstaat door de grafiek van een functie f op het interval $[a, b]$ om de x-as te wentelen : $I = \pi \int_a^b (f(x))^2 \, \mathrm{d}x$

Goniometrie

$\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ $\quad\sin(-t) = -\sin t$ $\quad\sin(\frac{\pi}{2} - t) = \cos t$ $\quad\sin(\pi - t) = \sin t$

$\tan t = \dfrac{\sin t}{\cos t}$ $\quad\cos(-t) = \cos t$ $\quad\cos(\frac{\pi}{2} - t) = \sin t$ $\quad\cos(\pi - t) = -\cos t$

$\sin 2t = 2 \sin t \cos t$ $\quad\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t \;=\; 2\cos^2 t - 1 \;=\; 1 - 2\sin^2 t$

$\sin(t + u) = \sin t \cos u + \cos t \sin u$ $\qquad \sin t + \sin u = 2 \sin \frac{t+u}{2} \cos \frac{t-u}{2}$

$\sin(t - u) = \sin t \cos u - \cos t \sin u$ $\qquad \sin t - \sin u = 2 \sin \frac{t-u}{2} \cos \frac{t+u}{2}$

$\cos(t + u) = \cos t \cos u - \sin t \sin u$ $\qquad \cos t + \cos u = 2 \cos \frac{t+u}{2} \cos \frac{t-u}{2}$

$\cos(t - u) = \cos t \cos u + \sin t \sin u$ $\qquad \cos t - \cos u = -2 \sin \frac{t+u}{2} \sin \frac{t-u}{2}$

$\sin\alpha = \sin\beta$ geeft $\alpha = \beta + k \cdot 2\pi \quad \vee \quad \alpha = \pi - \beta + k \cdot 2\pi$

$\cos\alpha = \cos\beta$ geeft $\alpha = \beta + k \cdot 2\pi \quad \vee \quad \alpha = -\beta + k \cdot 2\pi$

Parameterkrommen

Als $(x(t), y(t))$ de positie in het Oxy-vlak geeft van een bewegend punt op tijdstip t, dan wordt de snelheidsvector op tijdstip t gegeven door $(x'(t), y'(t))$.
De snelheid van het punt op tijdstip t wordt gegeven door

$$v(t) = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$$

en de lengte van de afgelegde weg tussen de tijdstippen $t = a$ en $t = b$ door

$$\int_a^b v(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\ \mathrm{d}t$$

Eenparige cirkelbeweging met middelpunt (m, n), straal r en hoeksnelheid ω:

$$\begin{cases} x(t) = r \cdot \cos\omega(t - t_0) \\ y(t) = r \cdot \sin\omega(t - t_0) \end{cases} \quad \text{met } \omega = \frac{2\pi}{T} \text{ waarbij } T \text{ de omlooptijd is.}$$

Differentiaalvergelijkingen

differentiaalvergelijking	oplossingen
exponentiële groei of verval	
$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = c \cdot y$	$y(t) = y(0) \cdot e^{ct}$
begrensde groei	
$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = c \cdot (K - y)$ met $c > 0$	$y(t) = K + (y(0) - K) \cdot e^{-ct}$
logistische groei	
$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = c \cdot y \cdot (G - y)$	$y(t) = \dfrac{G}{1 + ae^{-cGt}}$ waarin G de grenswaarde is en $a = \dfrac{G - y(0)}{y(0)}$

Meetkunde

De *cursief* gedrukte termen mogen als verwijzing in een bewijs gebruikt worden.

Rekenen in cirkels

lengte		
omtrek *cirkel*	$2\pi r$	r is straal
cirkelboog met middelpuntshoek α(rad)	αr	r is straal
oppervlakte		
oppervlakte *cirkel*	πr^2	r is straal
cirkelsector met middelpuntshoek α(rad)	$\frac{1}{2}\alpha r^2$	r is straal

Rekenen in driehoeken

Stelling van Pythagoras: Als driehoek ABC een rechte hoek in C heeft, dan geldt

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Omgekeerde stelling van Pythagoras: Als in driehoek ABC geldt

$$a^2 + b^2 = c^2 \ ,$$

dan is hoek C recht.

Cosinusregel: In elke driehoek ABC geldt

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$$

Sinusregel: In elke driehoek ABC geldt

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Meetkundige plaatsen

De verzameling van alle punten die dezelfde afstand hebben tot twee gegeven punten A en B is de middelloodlijn van het lijnstuk AB (*middelloodlijn*).

De verzameling van alle punten binnen een hoek die dezelfde afstand hebben tot de benen van die hoek, is de deellijn (bissectrice) van die hoek. (*deellijn*).

De verzameling van alle punten die afstand r tot een gegeven punt M hebben, is de cirkel met middelpunt M en straal r (*cirkel*).

De verzameling van alle punten die dezelfde afstand hebben tot twee elkaar snijdende lijnen, is het deellijnenpaar (bissectricepaar) van die twee lijnen (*deellijnenpaar*).

De verzameling van alle punten die dezelfde afstand hebben tot twee evenwijdige lijnen, is de middenparallel van dat lijnenpaar (*middenparallel*).

De verzameling van alle punten die gelijke afstand hebben tot een punt F en een lijn l is een parabool.

P op parabool met brandpunt F en richtlijn $l \iff d(P,F) = d(P,l)$

P op ellips met brandpunten F_1 en $F_2 \iff d(P,F_1) + d(P,F_2) = \text{constant}$

P op hyperbool met brandpunten F_1 en $F_2 \iff |d(P,F_1) - d(P,F_2)| = \text{constant}$

Hoeken, lijnen en afstanden

De overstaande hoeken bij twee snijdende lijnen zijn gelijk (*overstaande hoeken*).

Als twee evenwijdige lijnen gesneden worden door een derde lijn, dan zijn de F-hoeken en Z-hoeken gelijk (*F-hoeken, Z-hoeken*).

Als twee lijnen in twee verschillende punten gesneden worden door een derde lijn, waarbij er een paar gelijke F-hoeken of Z-hoeken optreedt, dan zijn die twee lijnen evenwijdig (*F-hoeken, Z-hoeken*).

Een *rechte* hoek is 90°, een *gestrekte* hoek is 180°.

De som van de hoeken van een driehoek is 180° (*hoekensom driehoek*).

De afstand (kortste verbinding) van een punt tot een lijn is de lengte van de loodlijn neergelaten vanuit dat punt op die lijn (*afstand punt tot lijn*).

Als drie punten A, B, C niet op één lijn liggen, dan geldt

$$AB + BC > AC \ (\textit{driehoeksongelijkheid}).$$

Driehoeken

Gelijkbenige driehoek

- Als in een driehoek twee hoeken gelijk zijn, dan zijn de tegenoverliggende zijden ook gelijk (*gelijkbenige driehoek*).
- Als in een driehoek twee zijden gelijk zijn, dan zijn de tegenoverliggende hoeken ook gelijk (*gelijkbenige driehoek*).

Gelijke driehoeken

Twee driehoeken zijn gelijk (congruent) als ze gelijk hebben:

- Een zijde en twee aanliggende hoeken. (*HZH*)
- Een zijde, een aanliggende hoek en de tegenoverliggende hoek. (*ZHH*)
- Twee zijden en de ingesloten hoek. (*ZHZ*)
- Alle zijden. (*ZZZ*)
- Twee zijden en de rechte hoek tegenover een van die zijden. (*ZZR*)

Gelijkvormige driehoeken

Twee driehoeken zijn gelijkvormig als ze gelijk hebben:

- Twee paren hoeken. (*hh*)
- Een paar hoeken en de verhouding van de omliggende zijden. (*zhz*)
- De verhouding van de zijden. (*zzz*)
- Een paar rechte hoeken en de verhouding van twee niet-omliggende zijden. (*zzr*)

Vierhoeken

De som van de hoeken van een vierhoek is 360° (*hoekensom vierhoek*).

Equivalente definities en eigenschappen van een *parallellogram*.

- Er zijn twee paren evenwijdige zijden.
- Er zijn twee paren gelijke overstaande zijden.
- Twee overstaande zijden zijn gelijk en evenwijdig.
- De diagonalen delen elkaar middendoor.

Equivalente definities en eigenschappen van een *ruit*.
- Het is een parallellogram met vier gelijke zijden.
- Het is een parallellogram waarin een diagonaal een hoek middendoor deelt.
- Het is een parallellogram waarin de diagonalen elkaar loodrecht snijden.

Equivalente definities en eigenschappen van een *rechthoek*.
- Het is een vierhoek met vier rechte hoeken.
- Het is een parallellogram met een rechte hoek.
- Het is een parallellogram met gelijke diagonalen.

Raaklijneigenschappen

De raaklijn in een punt P van een parabool maakt gelijke hoeken met de lijn die P verbindt met het brandpunt en de lijn door P loodrecht op de richtlijn (*raaklijneigenschap parabool*).

De raaklijn in een punt P van een ellips of hyperbool maakt gelijke hoeken met de lijnen die P verbinden met de beide brandpunten (*raaklijneigenschap ellips of hyperbool*).

Cirkeleigenschappen

Bij gelijke bogen behoren gelijke koorden (*boog en koorde*).

De loodlijn vanuit het middelpunt op een koorde deelt die koorde middendoor (*loodlijn op koorde*).

Een raaklijn aan een cirkel staat loodrecht op de verbindingslijn van middelpunt en raakpunt (*raaklijn*).

Stelling van Thales: Als C op de cirkel met middellijn AB ligt, dan is $\angle ACB$ recht.

Omgekeerde stelling van Thales: Als hoek C in driehoek ABC recht is,dan ligt C op de cirkel met middellijn AB.

Stelling van de omtrekshoek: Elke omtrekshoek is half zo groot als de bijbehorende middelpuntshoek.

De hoek tussen een raaklijn en een koorde is gelijk aan de bij die koorde behorende omtrekshoek (*hoek tussen koorde en raaklijn*).

Als punt C over de cirkelboog AB tussen de punten A en B beweegt, dan verandert de grootte van $\angle ACB$ niet (*stelling van de constante hoek*).

Als punt D aan dezelfde kant van AB ligt als punt C en $\angle ADB = \angle ACB$, dan liggen C en D op dezelfde cirkelboog AB (*omgekeerde stelling van de constante hoek*).

Koordenvierhoekstelling: Als $ABCD$ een koordenvierhoek is, dan is de som van elk paar overstaande hoeken 180°.

Omgekeerde koordenvierhoekstelling:
Als in een vierhoek de som van een paar overstaande hoeken 180° is, dan is het een koordenvierhoek.

Een raaklijn aan een cirkel staat loodrecht op de verbindingslijn van middelpunt en raakpunt (*raaklijn*).